Pregunta 1. Calcule las siguientes integrales :

a) (5 ptos.) $\int \frac{1}{\sqrt{1-3u^2}}du$ = [con $x=\sqrt{3}u$, $dx=\sqrt{3}du$] =

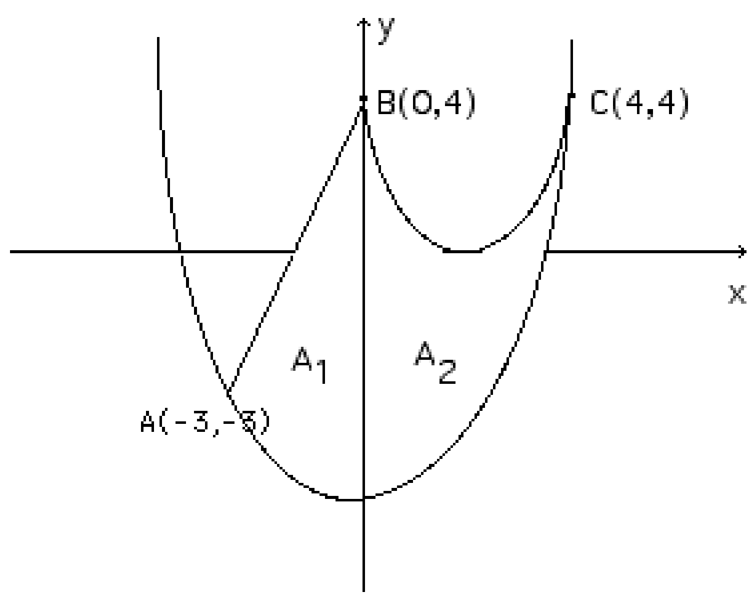
$= \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\frac{dx}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}\,\text{arcsen}(x) + C = \frac{1}{\sqrt{3}}\,\text{arcsen}(\sqrt{3}u) + C$;

b) (5 ptos.) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\tan(x)}{\sec^2(x)}dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan(x)\cos^2(x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \text{sen}(x)\cos(x)dx = [\,\frac{1}{2}\,\text{sen}^2(x)]_0^{\pi/4} = \frac{1}{4}$.

Pregunta 2. Dados los tres puntos A(-3, -3) , B(0, 4) , C(4, 4) , considere la figura plana limitada por :

i) el arco de parábola de ecuación $y= (x-2)^2$ con extremos B y C ;
ii) el arco de parábola de ecuación $y= x^2- 12$ con extremos A y C ;
iii) el segmento de recta AB.

a) (2 ptos.) Bosqueje la figura.
b) (3 ptos.) Exprese el área de la figura en términos de integrales convenientes .
c) (2 ptos.) Calcule el área de la figura.
a)



b) ecuación de la recta por A, B : $y = \frac{7}{3}x + 4$;

$$\text{Area} = A_1 + A_2 = \int_{-3}^{0} \left[\left(\frac{7}{3}x + 4 \right) - (x^2 - 12) \right] dx + \int_{0}^{4} \left[(x-2)^2 - (x^2 - 12) \right] dx =$$

$$c) = \left[\frac{7x^2}{6} + 16x - \frac{x^3}{3} \right]_{-3}^{0} + \left[\frac{(x-2)^3}{3} + 12x - \frac{x^3}{3} \right]_{0}^{4} =$$

$$= 0 - \left(\frac{63}{6} - 48 + 9 \right) + \left(\frac{8}{3} + 48 - \frac{64}{3} \right) - \left(-\frac{8}{3} \right) = 39 - \frac{21}{2} + 48 - \frac{48}{3} = \frac{121}{2} .$$

Pregunta 3. Calcule una aproximación del área de la región R comprendida bajo la gráfica de la función $f(x) = = -x^2+4$ y sobre el eje x, para $0 \leq x \leq 2$, usando una suma de Riemann respecto a la partición P = { 0 , 1/2 , 4/3 , 2 } y usando como puntos muestra el extremo izquierdo de cada subintervalo. Compare el resultado con el valor exacto del área R y determine el error de esta aproximación.

La suma de Riemann que se pide es : $S= f(0)(1/2 - 0) + f(1/2)(4/3 - 1/2) + f(4/3)(2 - 4/3) =$
$= (-0^2+4)(1/2) + (-(1/2)^2+4)(5/6) + (-(4/3)^2+4)(2/3) = 4/2+25/8+40/27 = \frac{1427}{216}$ [3 ptos.].

El área exacta de R es $\int_0^2 (-x^2+4)dx = -8/3+8 = \frac{16}{3}$ [2 ptos].

El error de la aproximación es $\frac{1427}{216} - \frac{16}{3} = \frac{275}{216}$ [1 pto.].

Pregunta 4.

a) (2 ptos) Enuncie el teorema del valor medio para integrales;

" Sea f una función continua en el intervalo [a, b].
Entonces existe c [con $a < c < b$] , tal que $\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a)$ ".

b) (2 ptos) Encuentre el valor promedio de la función f(x)=x en el intervalo [-1, 2] ;

$$f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx = \frac{1}{2-(-1)} \int_{-1}^{2} x.dx = \frac{1}{3} \left[\frac{x^2}{2} \right]_{-1}^{2} = \frac{1}{2} ;$$

c)(3 ptos) Halle el valor de x para el cual la función tiene el valor promedio.

$$f(c) = \frac{1}{2} \Rightarrow f(c) = c = \frac{1}{2} \Rightarrow c = \frac{1}{2} .$$